Stokes作用素等の分数巾の定義域について (補間空間の理論およびその応用)

森本, 浩子; 藤田, 宏

数理解析研究所講究録
136巻 1972年 119-132

Stokes作用素等の分数巾の定義域について

東大理　　森本浩子
　　　　　藤田　宏

§1. 記号と結果

ΩはR^3の有界領域で、その境界$\partial\Omega$は滑らかとする。$L_p(\Omega)$は、Ω上で定義されたp乗可積分な実函数を成分とするベクトル全体、$W_p^l(\Omega)$は、l階までの微分が$L_p(\Omega)$に属するようなベクトル函数全体とする。$D_\sigma(\Omega)$はΩにコンパクトな台を持つ無限回微分可能な実ベクトル函数φで、$\operatorname{div}\varphi = 0$をみたすもの全体とする。さらに、$H_\sigma(\Omega)$は、$D_\sigma(\Omega)$の$L_2(\Omega)$での閉包、$H_\sigma^1(\Omega)$は$D_\sigma(\Omega)$の$W_2^1(\Omega)$での閉包とする。$L_2(\Omega)$から$H_\sigma(\Omega)$への正射影を$P$であらわす。$D_\sigma(\Omega)$で定義された作用素$-P\Delta$は、ヒルベルト空間$H_\sigma(\Omega)$で正定値対称作用素である。$-P\Delta$のFriedrichs拡張を$A$であらわし、Stokes作用素と呼ぶ。$A$は正定値自己共役作用素である。$f \in L_2(\Omega)$としよう。$Au = Pf$は、次に同値である。

$$\begin{cases} \Delta u - \nabla p = -f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

但し p はあるスカラー函数である。作用素 S の定義域を $D(S)$ であらわすことにすれば，$D(A) = W_2^2(\Omega) \cap H_\sigma^1(\Omega)$ が知られている。(Agmon - Douglis - Nirenberg [1]，Cattabriga [2]，Ladyzhenskaya [8])

本稿では，A の分数巾 A^α ($0 < \alpha < 1$) の定義域 $D(A^\alpha)$ の特徴付けを，Dirichlet 境界条件のもとでの $B = -\Delta$ のそれに関連して与える (定理 1.2)。但し，$D(B) = W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$，ここに $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ は $C_0^\infty(\Omega)$ (ベクトル函数) の $W_2^1(\Omega)$ における閉包である。定理 1.2 の結果は，§4 で示すように，ナビエ - ストークス方程式の研究に有用である。定理 1.2 は，すでに Fujita - Morimoto [3] で証明されているが，今回は問題を一般化した形での証明を試みる (補題 2.3)。この補題は，$D(B^\alpha)$ の特徴付けに関する既知の結果 (Fujiwara [5]，Grisvard [6] 等による) の一部を証明するのにも役立つ。読者の便宜のために，定理の形でのべておこう。

<u>定理 1.1</u>

$$D(B^\alpha) = W_2^{2\alpha}(\Omega), \qquad \tfrac{1}{4} > \alpha > 0,$$

$$D(B^\alpha) = \{ u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Omega);\ \rho^{-\frac{1}{2}} u \in L_2(\Omega) \}, \qquad \alpha = \tfrac{1}{4},$$

$$D(B^{\alpha}) = \{ u \in W_2^{2\alpha}(\Omega) \;;\; u|_{\partial\Omega} = 0 \}, \quad 1 > \alpha > \frac{1}{4},$$

但し．$\rho(x)$は点xの$\partial\Omega$からの距離をあらわす。

我々の主要な結果は、次の定理である。

<u>定理 1.2</u>

$$D(A^{\alpha}) = D(B^{\alpha}) \cap H_{\sigma}, \qquad 1 > \alpha > 0.$$

<u>注意 1.3</u>

次の不等式をみたす正定数C_{α}が存在する。

$$\frac{1}{C_{\alpha}} \| B^{\alpha} u \| \leq \| A^{\alpha} u \| \leq C_{\alpha} \| B^{\alpha} u \|$$

$$(u \in D(A^{\alpha}) = D(B^{\alpha}) \cap H_{\sigma}).$$

上の二つの定理とソボレフの埋蔵定理を用いて．

<u>系 1.4</u>

$$D(A^{\gamma}) \subset C(\bar{\Omega}), \qquad \gamma > \frac{3}{4},$$

$$D(A^{\theta}) \subset W_p^1(\Omega), \qquad 1 > \theta > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{p} = \frac{5}{6} - \frac{2\theta}{3},$$

特に $D(A^{\frac{5}{8}}) \subset W^1_{\frac{12}{5}}(\Omega)$。

§2．部分空間の補間空間に関する一補題．

我々は実補間法を用いる。たとえば，Lions-Peetre [11]を参照されたい。X, Y, Zはバナッハ空間とし．分離公理をみたす線型位相空間$\mathfrak{X}$が存在して．X, Y, Zは$\mathfrak{X}$に含まれ．かつ埋込みは連続であるとする。これを$X \subsetneq \mathfrak{X}$などと書くことがある。

定義によれば. $a \in S(2, 1-\alpha, X; 2, -\alpha, Y)$ は $u: (0,\infty) \to \mathcal{X}$ で $\int_0^\infty \|t^{1-\alpha}u(t)\|_X^2 \frac{dt}{t} < +\infty$, $\int_0^\infty \|t^{-\alpha}u(t)\|_Y^2 \frac{dt}{t} < +\infty$ をみたす u によって $a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$ とあらわされる。平均空間 $S(2, 1-\alpha, X; 2, -\alpha, Y)$ を $[X, Y]_{1-\alpha}$ と書くことにしよう。$X \cap Y$, $X+Y$ には次のノルムを入れて、バナッハ空間とみなす。

$$\|u\|_{X\cap Y} = \max(\|u\|_X, \|u\|_Y)$$

$$\|u\|_{X+Y} = \inf_{u=x+y}(\|x\|_X + \|y\|_Y)$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ は、X から Y への有界線型作用素全体とする。平均空間に対して、次の補間定理が成立つ。

<u>定理 2.1</u> (Lions-Peetre [11])

X_i, Y_i $(i = 0, 1)$ は、バナッハ空間で $X_i \subsetneq \mathcal{X}$, かつ $Y_i \subsetneq \mathcal{X}$ とする。このとき $T \in \mathcal{L}(X_0, Y_0) \cap \mathcal{L}(X_1, Y_1)$ ならば $T \in \mathcal{L}([X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta)$ でかつ作用素ノルムは次の不等式をみたす。

$$\|T\|_{\mathcal{L}([X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X_0, Y_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(X_1, Y_1)}^{\theta}$$

$$(1 > \theta > 0).$$

<u>定理 2.2</u> (Lions-Peetre [11])

X, Y は上にのべたバナッハ空間の組とする。この時

$$\left[[X, Y]_{\theta_0}, [X, Y]_{\theta_1}\right]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$$

但し $0 < \theta < 1$ 。

部分空間の補間空間に関して、次の補題が成立つ。

<u>補題 2.3</u>

Kは $\mathcal{H}$ で定義された線型作用素で 次の性質を持つとする。

i) $K \in \mathcal{L}(X, X \cap Z) \cap \mathcal{L}(Y, Y \cap Z)$

ii) $K\varphi = \varphi$ for $\varphi \in (X + Y) \cap Z$.

このとき

$$[X, Y]_\theta \cap Z = [X \cap Z, Y \cap Z]_\theta$$

証明

$[X, Y]_\theta \cap Z \supsetneq [X \cap Z, Y \cap Z]_\theta$ は明らかである。従って逆むきの包含関係を導びけばよい。仮定 i) と定理2.1により、$K \in \mathcal{L}([X, Y]_\theta, [X \cap Z, Y \cap Z]_\theta)$ である。ところが ii) より $\varphi \in [X, Y]_\theta \cap Z$ に対しては $K\varphi = \varphi$ が成立つ。故に $[X, Y]_\theta \cap Z \subsetneq [X \cap Z, Y \cap Z]_\theta$.

証明終り

<u>注意 2.4</u>

この補題は 他の補間法による補間空間についても成立つことは明らかである。

<u>問題 2.5</u>

補題 2.3 に関連して、次の等号が成立つ条件を調べよ。

$$[X, Z]_\theta \cap [Y, Z]_\theta = [X \cap Y, Z]_\theta .$$

たとえば X, Y が、ヒルベルト空間 Z で定義された正定値自己共役作用素 A, B の定義域で、かつ A, B が可換であれば等号が成立つ（Lions-Magenes [10] Chap 1）。バナッハ空間の場合、閉作用素 A, B にある種の可換性を仮定すれば等号が成立つことも知られている（Muramatsu [12]）。

補題 2.3 の応用として $D(B^\alpha)$ $(1 > \alpha > \frac{1}{2})$ の特徴付けをおこなうことが出来る。まず、次の補題をのべておこう。これは Lions [9] の定理の特別な場合である。

補題 2.6

H はヒルベルト空間、S は H における正定値自己共役作用素とする。このとき $D(S^\alpha) = [D(S), H]_{1-\alpha}$ が成立つ。

この補題と定理 2.2 によれば $D(B^{1-\theta}) = [D(B), D(B^{1/2})]_{2\theta}$, 但し $1 > 1-\theta > \frac{1}{2}$。$D(B) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $D(B^{1/2}) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ は既知である。$u \in W_2^1(\Omega)$ の境界値 γu に対して、次の境界値問題を考えよう。

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega , \\ \gamma v = \gamma u & \text{on } \partial\Omega . \end{cases}$$

この解を v とする。楕円型方程式の一般論（たとえば Lions-Magenes [10] Chap. 2）より、評価

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c\,\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$
$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c\,\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)},$$

が成立つ。 又 トレース作用素に関して、次の評価が成立つ。

$$\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)},$$
$$\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

$Ku \equiv u - v$ で定義される作用素 K は、$X = W_2^2(\Omega)$, $Y = W_2^1(\Omega)$, $Z = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ として補題 2.3 の仮定をみたすことは 容易にたしかめられる。 従って、$[W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega), \mathring{W}_2^1(\Omega)]_{2\theta} = [W_2^2(\Omega), W_2^1(\Omega)]_{2\theta} \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, 故に、
$D(B^{1-\theta}) = W_2^{2-2\theta}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $1 > 1-\theta > \frac{1}{2}$。

§3. 定理 1.2 の証明

Cattabriga [2], *Ladyzhenskaya* [8] によって、次の事実が証明されている。

<u>補題 3.1</u>

定数 c_1, c_2 が存在して、すべての $\psi \in H_\sigma(\Omega)$ に対して、次の不等式が成立つ。

$$\|\Delta A^{-1}\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1\|A^{-1}\psi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c_2\,\|\psi\|_{L_2(\Omega)}.$$

さて、補題 2.6 により、$D(A^\alpha) = [D(A), H_\sigma]_{1-\alpha}$, $D(B^\alpha) = [D(B), L_2]_{1-\alpha}$ である。 $D(A) = D(B) \cap H_\sigma$ であることと

に注意しよう。$D(B)$ の元 φ に対し，$\mathring{K}\varphi = -A^{-1}PB\varphi$ で作用素 $\mathring{K}$ を定義する。$\mathring{K}$ は，$D(B)$ の元を $D(A)$ にうつす。補題 3.1 により，$\mathring{K}$ は，$K \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), H_\sigma(\Omega))$ に拡張される。φ を $D_\sigma(\Omega)$ の任意の元としよう。定義により，$-PB\varphi = A\varphi$，故に $\mathring{K}\varphi = \varphi$ である。$D_\sigma(\Omega)$ は $H_\sigma(\Omega)$ で dense だから，任意の $\varphi \in H_\sigma(\Omega)$ に対して $K\varphi = \varphi$ が成立つ。$D(A^\alpha)$ (resp. $D(B^\alpha)$) にノルム $\|A^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$ (resp. $\|B^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$) を入れてヒルベルト空間とみなすと，K は $D(B)$ を $D(A)$ にうつす有界作用素で，任意の $\varphi \in D(B)$ に対し，$\|K\varphi\|_{D(A)} \leq \|\varphi\|_{D(B)}$ が成立つ。$X = D(B)$, $Y = L_2(\Omega)$, $Z = H_\sigma(\Omega)$ として補題 2.3 を用いることが出来て，
$[D(B), L_2]_{1-\alpha} \cap H_\sigma = [D(B) \cap H_\sigma, L_2 \cap H_\sigma]_{1-\alpha}$，故に定理は証明された。

注意 3.2

定理 2.1 により，特に $K \in \mathcal{L}(D(B^\alpha), D(A^\alpha))$ である。さらに，任意の $\varphi \in D(B^\alpha)$ に対して次が成立つ。

$$\|A^\alpha K\varphi\| \leq \|K\|^{\alpha}_{\mathcal{L}(D(B), D(A))} \|K\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(L_2, H_\sigma)} \|B^\alpha \varphi\|$$

故に $\|A^\alpha K\varphi\| \leq \|K\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(L_2, H_\sigma)} \|B^\alpha\varphi\|$.

この不等式は，一般化された Heinz の不等式 (Kato [7]) からも導びかれる。

§4. ナビエ-ストークス方程式 (Fujita-Morimoto [4])

次の初期値問題を考察しよう。

$$(E) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -Au + Fu + Pf \\ u(0) = a \end{cases}$$

但し、$Fu = -P(u\cdot\nabla)u$ である。

次の補題から始めよう。

<u>補題 4.1</u>

正定数 c_0 が存在して、$D(A^{\frac{5}{8}})$ の任意の元 u, v に対して、次の不等式が成立つ。

$$\|Fu\| \leq c_0 \|A^{\frac{5}{8}} u\|^2 .$$

$$\|Fu - Fv\| \leq c_0 \left(\|A^{\frac{5}{8}} u\| + \|A^{\frac{5}{8}} v\|\right) \|A^{\frac{5}{8}}(u-v)\| .$$

証明

Hölder の不等式により

$$\|Fu\| = \|-P(u\cdot\nabla)u\| \leq \|u\|_{L_{12}} \|\nabla u\|_{L_{\frac{12}{5}}} .$$

Sobolev の埋蔵定理によれば $W^1_{\frac{12}{5}} \subset L_{12}$ であるから

$$\|Fu\| \leq C \|\nabla u\|^2_{L_{\frac{12}{5}}}$$

系 1.4 によれば $D(A^{\frac{5}{8}}) \subset W^1_{\frac{12}{5}}$ 、故に ある正定数 c_0 が存在して

$$\|Fu\| \leq c_0 \|A^{\frac{5}{8}} u\|^2 .$$

二番目の不等式も同様にして導かれる。　　　　証明終り.

方程式 (E) の解を、函数空間 $\mathcal{S}_T$ ($T \geq 0$) で求める。

$\mathcal{S}_T$ は、次のように定義される。

$$\mathcal{S}_T \equiv \{ u : (0, T] \to D(A^{\frac{5}{8}}) \text{ 連続 };$$
$$|||u|||_T \equiv \sup_{0<t\leq T} t^{\frac{3}{8}} \| A^{\frac{5}{8}} u(t) \|_{L_2(\Omega)} < +\infty \}$$

$\mathcal{S}_T$ は、ノルム $|||u|||_T$ で、バナッハ空間となる。

簡単のために、外力 $Pf = 0$ の場合を扱う。積分作用素 Φ を次のように定義しよう。

$$u_0(t) = e^{-tA} a$$

$$\Phi u(t) = u_0(t) + \int_0^t e^{-(t-s)A} Fu(s)\, ds.$$

$u_0 \in \mathcal{S}_T$ ならば Φ は $\mathcal{S}_T$ の元を $\mathcal{S}_T$ にうつす。なぜならば、補題4.1により、

$$\int_0^t \| A^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A} Fu(s) \| ds$$
$$\leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} \| A^{\frac{5}{8}} u(s) \|^2 ds$$
$$\leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} s^{-\frac{6}{8}} ds \sup_{0<s\leq t} \| s^{\frac{3}{8}} A^{\frac{5}{8}} u(s) \|^2.$$

しかるに、積分 $\int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} s^{-\frac{6}{8}} ds = t^{-\frac{3}{8}} \beta_1$ ($\beta_1 = B(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$, $B(\cdot\,,\,\cdot)$ はベータ函数) であるから、不等式

(*) $$|||\Phi u|||_T \leq |||u_0|||_T + C_0 \beta_1 |||u|||_T^2$$

を得る。ここで定数 r と、$\mathcal{S}_T$ の閉球 $\mathcal{B}_T$ を次のように定めよう。

$$r \equiv |||u_0|||_T \cdot 4 C_0 \beta_1$$

$$\mathcal{B}_T \equiv \{ u \in \mathcal{S}_T ;\ |||u|||_T \leq 2 |||u_0|||_T \}$$

この時、Φ に関して次の命題が成立つ。

命題 4.2

i) Φは $\mathcal{B}_T$上 係数 γの Lipschitz連続である。すなわち、$u, v \in \mathcal{B}_T$ ならば

$$|||\Phi u - \Phi v|||_T \leq \gamma |||u - v|||_T .$$

ii) $\gamma \leq 1$ ならば $\mathcal{B}_T$は Φで不変である。

証明

i) 補題 4.1 を用いれば

$$\|A^{\frac{5}{8}}(\Phi u - \Phi v)\|$$
$$\leq \int_0^t \|A^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A}(Fu(s) - Fv(s))\| ds$$
$$\leq C_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} \left(\|A^{\frac{5}{8}} u(s)\| + \|A^{\frac{5}{8}} v(s)\|\right) \|A^{\frac{5}{8}}(u(s) - v(s))\| ds$$

故に $|||\Phi u - \Phi v|||_T \leq C_0\beta_1 \left(|||u|||_T + |||v|||_T\right) |||u - v|||_T .$

$u, v \in \mathcal{B}_T$ であるから、

$$|||\Phi u - \Phi v|||_T \leq 4C_0\beta_1 |||u_0|||_T\, |||u - v|||_T$$
$$= \gamma |||u - v|||_T$$

ii) 不等式(*)を $u \in \mathcal{B}_T$ に対して用いれば

$$|||\Phi u|||_T \leq |||u_0|||_T + 4C_0\beta_1 |||u_0|||_T^2$$
$$\leq (1 + \gamma) |||u_0|||_T .$$

従って $\gamma \leq 1$ ならば $\Phi u \in \mathcal{B}_T$ である。 証明終り。

命題 4.3

$\gamma \equiv 4C_0\beta_1 |||u_0|||_T < 1$ となる正数 Tが存在すれば、作用素 Φは contraction である。 従って不動点がただ1つ存

在する。

証明

命題4.2より直ちに従う。

注意4.4

条件 $\gamma<1$ は、どのような場合にみたされるかを調べよう。

(イ) $a\in D(A^{\frac{1}{4}})$ の時.

$$t^{\frac{3}{8}}\|A^{\frac{5}{8}}e^{-tA}a\| = t^{\frac{3}{8}}\|A^{\frac{3}{8}}e^{-tA}A^{\frac{1}{4}}a\| \leq \|A^{\frac{1}{4}}a\|$$

であるから、$4c_0\beta_1\|A^{\frac{1}{4}}a\|<1$ が成立つほどに $\|A^{\frac{1}{4}}a\|$ が小さければ、$T=\infty$ ととれる。又、任意の $a\in D(A^{\frac{1}{4}})$ に対して、$\|t^{\frac{3}{8}}A^{\frac{5}{8}}u_0(t)\|\longrightarrow 0$ ($t\to 0$) であるから、$\gamma<1$ となるような $T=T(a)$ 存在する。

(ロ) $a\in D(A^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ ($\varepsilon>0$) の時.

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{8}}\|A^{\frac{5}{8}}u_0(t)\| &= t^{\varepsilon}\cdot t^{\frac{3}{8}-\varepsilon}\|A^{\frac{3}{8}-\varepsilon}e^{-tA}A^{\frac{1}{4}+\varepsilon}a\| \\ &\leq T^{\varepsilon}\|A^{\frac{1}{4}+\varepsilon}a\| \end{aligned}$$

故に、$T^{\varepsilon}<\left(4c_0\beta_1\|A^{\frac{1}{4}+\varepsilon}a\|\right)^{-1}$ なる T に対して $\gamma<1$ となる。

Φ の不動点は、実は方程式 (E) をみたすことが証明出来るが、ここでは省略する。

定理4.5

$\gamma<1$ となる $T>0$ が存在するとき、(E) の解が $\mathcal{B}_T$

のうちにたゞ1つ存在する。

文献

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. I : Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727; II : Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.

[2] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rend. Semi. Mat. Univ. Padova, 31 (1961), 308-340.

[3] H. Fujita and H. Morimoto, On fractional powers of the Stokes operator, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1141-1143.

[4] H. Fujita and H. Morimoto, Fractional powers of operators and interpolation of spaces applied to the Navier-Stokes equation (to appear)

[5] D. Fujiwara, L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 15 (1968), 169-177.

[6] P. Grisvard, Caractérisatión de quelques espaces d'interpolatión, Arch. Rat. Mech. Anal, 25 (1967), 40-63.

[7] T. Kato, A generalizatión of the Heinz inequality, Proc. Japan Acad., 37 (1961), 305-308.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon-Breach, New York, 1963.

[9] J.L. Lions, Espaces d'interpolatión et domaines de puissances fractiónnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), 233-241.

[10] J.L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes Vol I, Dunod, Paris, 1968.

[11] J.L. Lions and J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolatión, Publ. Math. de l'I. H. E. S., Paris, No 19, 1964.

[12] T. Muramatsu, Products of fractiónal powers of operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), 581-590.